Geometria iperbolica 23-04

Teo: S superficie t.c. $\underbrace{\chi(S)<0}_{\substack{\text{necessaria} \\ \text{x Gauss-Bonnet}}}$ $\Rightarrow$ S ammette infinite strutture iperboliche.

Domanda: Sia M una 3-varietà compatta $\overset{\text{orientabili}}{\vee}$ (anche con bordo). Quali sono condizioni necessarie affinché $\underbrace{\ }_{\text{int}(M)}$ ammetta una struttura iperbolica?

Condizioni necessarie:

1) $|\pi_1(M)| = +\infty$ (volume) $\mathrm{int}(M) \cong \mathbb{H}^3 / \Gamma$, $\Gamma = \pi_1(M)$

2) $\partial M = \emptyset$ oppure $\partial M = \coprod T^2$ - unione disgiunta di tori

Def: Sia M una 3-varietà connessa e orientabile (∂M a piacere).

M si dice irriducibile se ogni sfera liscia $S \subset \mathrm{int}(M)$ borda una palla.

Esempi: M non irriducibile $M = S^2 \times S^1$ $S = S^2 \times \{p\}$ è una sfera liscia che non è il bordo di una palla.

Teo (Alexander): $\mathbb{R}^3$ è irriducibile ($\mathbb{H}^3$ è irriducibile)

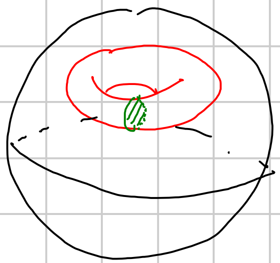
Prop: Sia $\tilde{M} \to M$ un rivestimento di 3-varietà. Se $\tilde{M}$ è irriducibile allora M è irriducibile.

3) Corollario: Se M è una varietà iperbolica completa e di volume finito $\Rightarrow$ M è irriducibile.

Def: Sia M una 3-varietà orientabile, connessa e compatta (∂M a piacere).

M si dice <u>atoroidale</u> se ogni mappa $f: T^2 \to M$ π_1-iniettiva è omotopa a $g: T^2 \to M$ t.c. $\mathrm{Im}(g) \subset \partial M$

M



$B \subset M^3$

tori non π_1-iniettivi.

Lemma: Sia $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ discreto, e $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma$ tali che $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Allora φ_1 e φ_2 sono isometrie paraboliche con lo stesso punto fisso $p \in \partial \mathbb{H}^n$.

Corollario Se $M = \mathbb{H}^3 / \Gamma$ Γ discreto e senza torsione.

Se $G < \Gamma$ $G \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ allora G è il gruppo fondamentale di una cuspide torica di M (e M è non compatta).

Quindi M è una 3-varietà iperbolica, allora è atoroidale. 4)

Teo: Iperbolizzazione (Thurston - Perelman):

Sia M una 3-varietà compatta e orientabile t.c. $\partial M = \phi$ oppure $\partial M = \coprod T^2$.

Se M è irriducibile, atoroidale e $\pi_1(M)$ è infinito, allora $\mathrm{int}(M)$ ammette una metrica iperbolica completa e di volume finito.

Teo: Mostow - Prasad: Se M è una n-varietà iperbolica ($n \geq 3$) completa e di volume finito. Allora la metrica è unica.

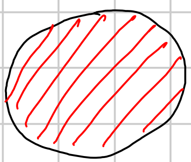
Corollario: Gli invarianti geometrici di M sono anche invarianti topologici.

Esempi: Complementari di nodi S^3.

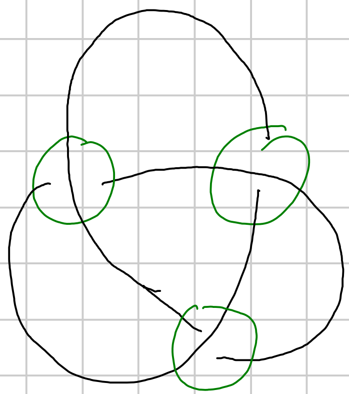
Def: Un nodo K in S^3 è il dato di un embedding liscio $\varphi : S^1 \to S^3$.

Dato K nodo in S^3, definiamo il complementare di K in S^3 come la 3-varietà (non compatta) $M_K = S^3 \setminus \operatorname{Im} \varphi$. ($M_K$ dipende solo dalla classe di isotopia del nodo K).

Esempi:

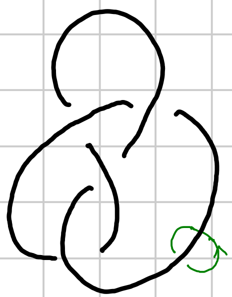


Nodo banale



Nodo trifoglio

Nodo figura 8.



- generatore di $H_1(M,\mathbb{Z})$

(perché S^3 è irriducibile)

Oss: Ogni complementare di nodo è irriducibile e ha gruppo fondamentale infinito. $\to$ $H_1(M,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$

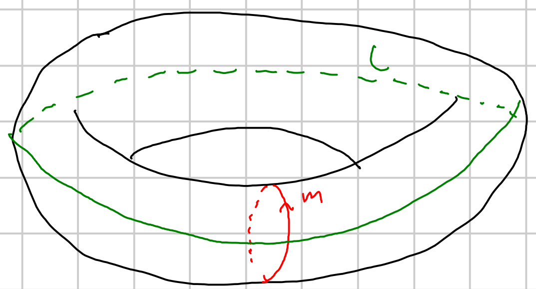
intorno regolare aperto di K.

$$M = S^3 \setminus K \quad \text{allora} \quad M \cong \mathrm{int}(N) \qquad N = S^3 \setminus \underset{\substack{\cong \\ S^1 \times B^2}}{U(K)}$$

$\partial N = T^2$

Quali complementari di nodi sono atoroidali?

Def: Nodo torico.



Presi (p, q) interi coprimi, consideriamo il nodo K dato dalla curva $q \cdot m + p \cdot l$ su T (è un nodo in S^3).

Questo si dice <u>nodo torico</u>.

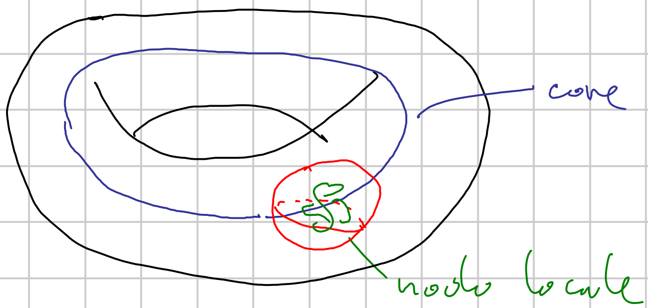
Il complementare di un nodo torico non è mai atoroidale

(C'è un toro immerso in modo π_1-iniettivo che non è parallelo al bordo).

Esempio: Il nodo trifoglio è un nodo torico con $(p,q) = (2,3)$

: Nodo satellite.

Def: Un nodo in un toro solido $D^2 \times S^1$ è locale se è contenuto in una palla.

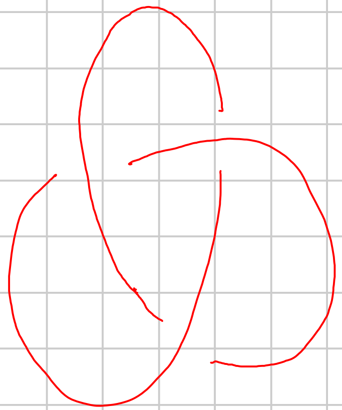


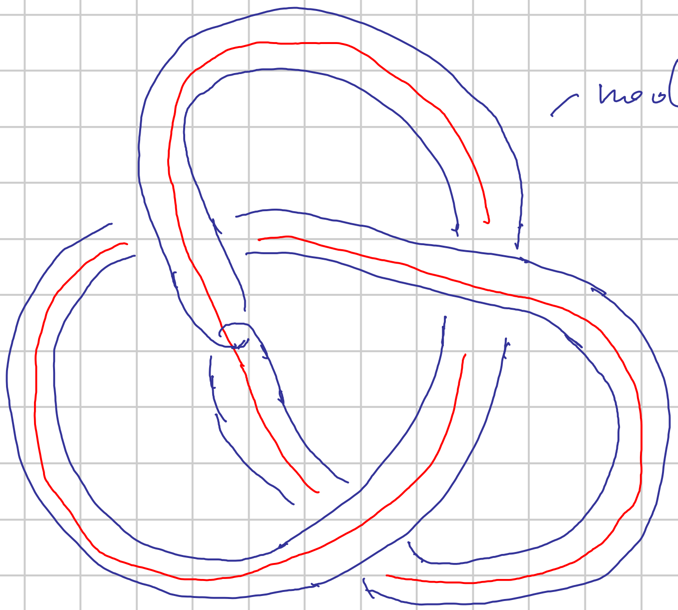
Un nodo in $D^2 \times S^1$ è il core di $D^2 \times S^1$ se è isotopo a $\{*\} \times S^1$

Def: Un nodo $K \subset S^3$ è un __satellite__ se è l'immagine di un nodo

$K' \subset D^2 \times S^1$ che non è locale e non è il core tramite un embedding

$\varphi : D^2 \times S^1 \hookrightarrow S^3$ __non banale__





nodo satellite del nodo trifoglio

I nodi satelliti non sono atoroidali

Dalla definizione $\varphi(\partial(D^2\times S^1)) = \varphi(S^1\times S^1)$ è un toro embedded, π_1-iniettivo, non parallelo al bordo.

Teo: Sia K un nodo che non è torico e non è un satellite.

Allora $M_K = S^3 \setminus K$ ammette una metrica iperbolica completa e di volume finito.

In tal caso K si dice nodo iperbolico.

Esempio: Nodo figura 8.

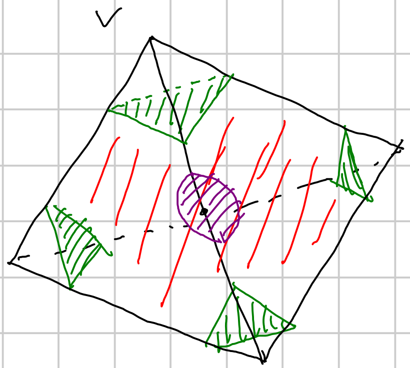
Triangolazioni ideali

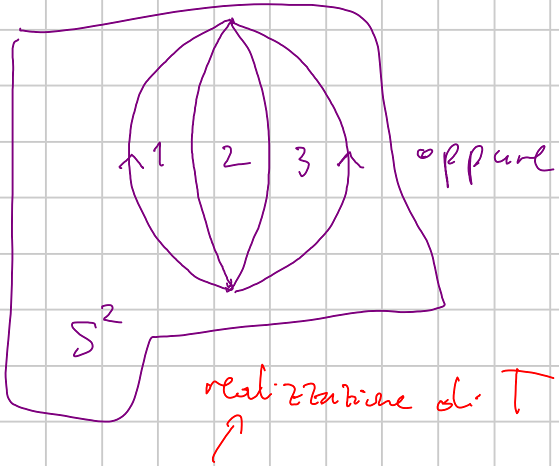
Siano $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ copie del 3-simplesso standard orientato.

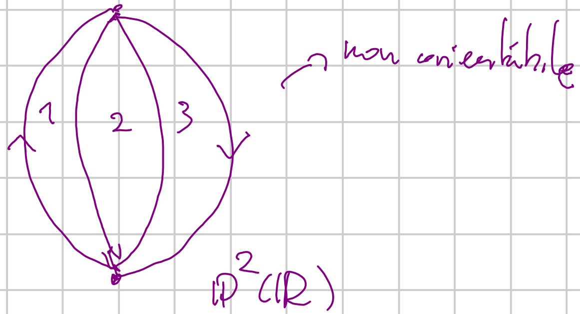
Una triangolazione T è il dato di una partizione delle $4n$-facce in $2n$-coppie e, per ogni coppia $\{F_1, F_2\}$, di un'isometria simpliciale da F_1 in F_2. La triangolazione T è orientata se le isometrie simpliciali sono orientation-reversing

Oss: La realizzazione geometrica X di una triangolazione orientabile non è necessariamente una 3-varietà.

Il link di un vertice potrebbe non essere una sfera.







Data T triangolazione, sia $M = X \setminus \{\text{vertici}\}$. Diciamo che T è una triangolazione ideale di M.

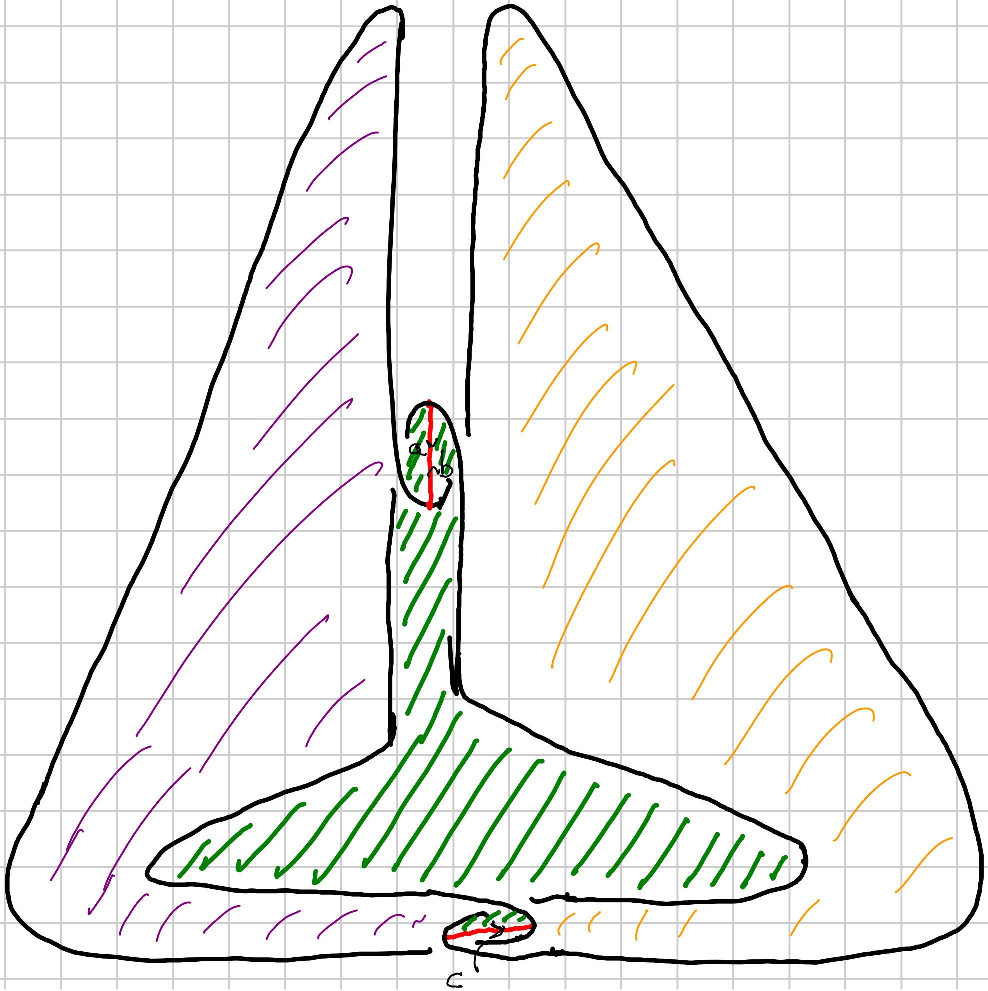
Prop: Se T è orientata, allora M è una 3-varietà orientabile, omeomorfa all'interno di una 3-varietà compatta e orientabile. (Ottenuta rimuovendo intorni regolari aperti dei vertici).

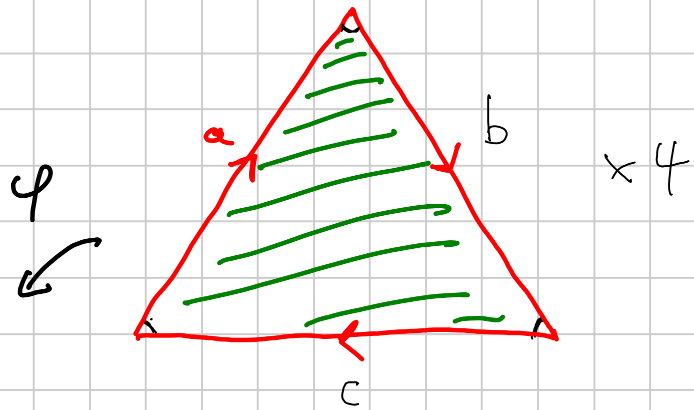
Dim: Dato x punto medio di uno spigolo. Un suo intorno regolare è il cono su una superficie chiusa

(1) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ – impossibile perché T è orientabile

(2) S^2 – ok

Esempio: Triangolazione ideale per $M = S^3 \setminus \{\text{figura } 8\}$



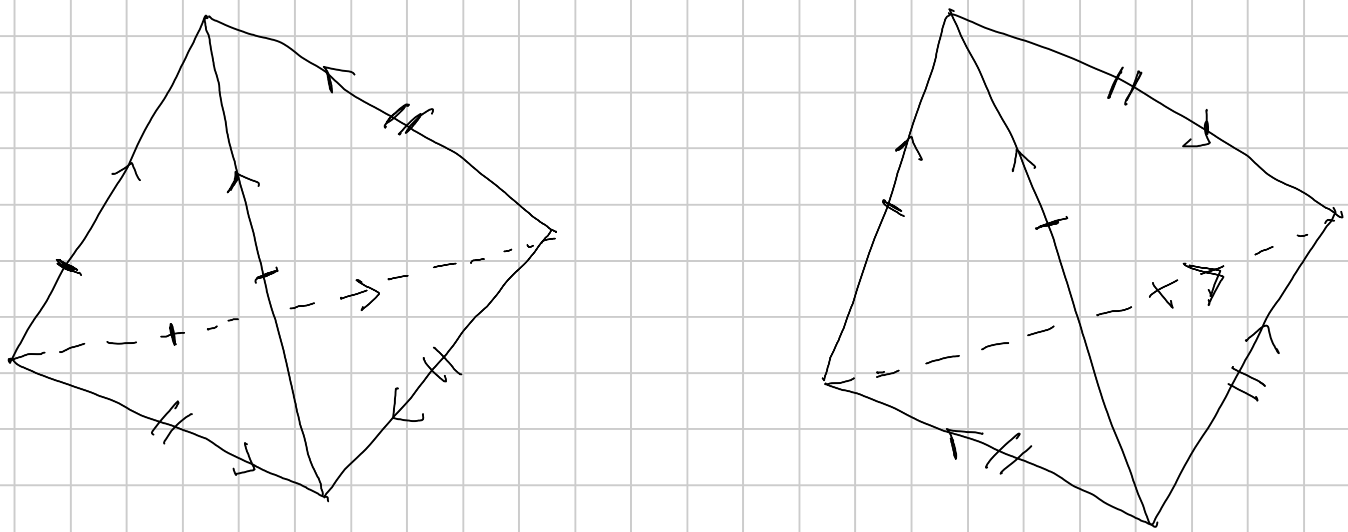


Otteniamo un 2-complesso ideale

con "0" vertici, 2 spigoli

e 4 triangoli

Il complementare di questo complesso in $S^3 \setminus \{\text{figura } 8\}$ è dato dalla parte interna di due tetraedri ideali:



C'è un unico modo di identificare le facce rispettando le etichette e le frecce.

Link vertice $= T^2$